

Appendice 3 - Lavoro e potenziale

3.1. Forza

La forza agente su un punto materiale è, in generale, funzione della posizione del punto P al quale è applicata, cioè delle sue coordinate, della velocità del punto P e del tempo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P; \mathbf{v}; t)$$

indicando con $OP \equiv (x; y; z)$ le coordinate di P e con $\mathbf{v} \equiv (\dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$ le componenti della velocità si ha:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}; t)$$

ossia la forza è, nel caso più generale, una funzione di sette variabili.

Denoteremo con F_x, F_y, F_z le componenti della forza rispetto al sistema di assi cartesiani prescelto. In molti problemi fisici le forze non dipendono dal tempo, né dalla velocità, ma solo dalle coordinate del punto P , cioè dalla posizione del punto, in tal caso la forza si dice posizionale.

3.2. Lavoro di una forza

Introduciamo ora il concetto di *lavoro* di una forza applicata ad un punto. Consideriamo, anzitutto, i lavori infinitesimi: il lavoro infinitesimo è una forma differenziale lineare ottenuta prendendo il prodotto scalare della forza per uno spostamento infinitesimo del suo punto di applicazione:

$$dL = \mathbf{F} \times d\mathbf{P}$$

lavoro compiuto dalla forza durante il moto, cioè lo spostamento fisico $d\mathbf{P}$ compiuto dal punto sotto l'azione della forza \mathbf{F} .

3.2.1. Lavoro lungo un cammino finito

Scelta una curva γ di estremi P_1 e P_2 il lavoro è definito attraverso l'integrale della forza lungo la curva, cioè lungo il cammino finito P_1 a P_2 . Se la curva è nota mediante la sua forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad \text{equazioni parametriche della curva} \quad (\text{A3.1})$$

con $s_1 \leq s \leq s_2$

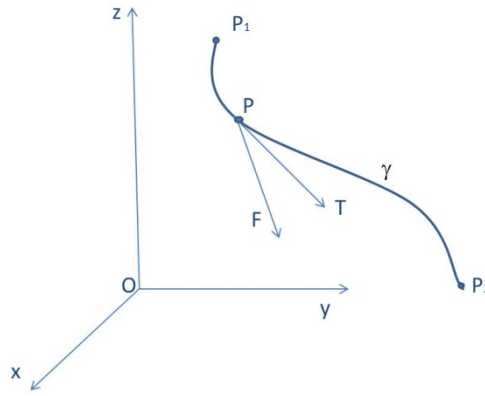


Figura A3.1 – Lavoro lungo un cammino finito

Se si assume la *legge oraria* con la quale la traiettoria è percorsa il moto di P lungo γ è noto:

$$s = s(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \implies s_1 = s(t_1); \quad s_2 = s(t_2)$$

Il lavoro lungo il cammino finito sarà dato da:

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \times d\mathbf{P} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (\text{A3.2})$$

Il differenziale dello spostamento $d\mathbf{P}$, che compare nell'integrale del lavoro (A3.2), può essere a sua volta espresso in termini del tempo, osservando che $d\mathbf{P} = \mathbf{v} dt$ e, pertanto, si ha:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(P(s(t)), \mathbf{v}(s(t)), t) \times \mathbf{v}(s(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt$$

dove la funzione integranda $W(t) = \mathbf{F} \times \mathbf{v}$ è denominata *potenza* sviluppata dalla forza F .

Il lavoro di una forza lungo un cammino finito dipende dalla forma della traiettoria e non dalla legge oraria con cui si muove il punto di applicazione.

3.3. Forza conservativa e potenziale

Una forza si dice *conservativa* quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto, ovvero quando esiste una funzione U a un sol valore, regolare, tale che il suo differenziale totale è uguale alla forma differenziale esaminata; la funzione U si dice *potenziale*.

$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ risulta essere una forma differenziale esatta se esiste una funzione regolare a un sol valore $U = U(x; y; z)$ tale che:

$$dL = dU \quad (\text{A3.3})$$

Valendo, pertanto, l'identità fra il differenziale della funzione U e la forma differenziale del lavoro si ha:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz \equiv \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (\text{A3.4})$$

Affinché sia vera la (A3.4), U deve essere necessariamente funzione solamente di x, y , e z e non di altre variabili, quali velocità o tempo.

Ne consegue allora l'identità delle componenti della forza con le derivate parziali della funzione U :

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z), \quad F_y dy = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z), \quad F_z dz = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) \quad (\text{A3.5})$$

In termini di vettori è possibile scrivere:

$$\mathbf{F} = \nabla U \quad (\text{A3.6})$$

Dire che una forza è conservativa equivale a dire che essa è pari al gradiente della funzione potenziale U , denominato potenziale della forza F ; una forza è, pertanto, conservativa quando ammette potenziale.

Essendo il potenziale definito mediante la condizione differenziale (A3.3), è definito a meno di una costante additiva arbitraria. Per individuare univocamente il valore del potenziale in un punto bisogna assegnare il valore di tale costante, il che equivale ad assegnare il valore zero al potenziale in un certo punto dello spazio.

Per calcolare il lavoro lungo un cammino finito di una forza conservativa consideriamo:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dU(s)}{ds} ds = [U(s)]_{s=s_1}^{s=s_2} = U(s_2) - U(s_1) = U(P_2) - U(P_1)$$

Pertanto, quando la forza è conservativa, il lavoro è dato dalla differenza del potenziale calcolato nei punti estremi del cammino d'integrazione, ovvero non dipende dalla curva, ma solo dalle coordinate del punto in cui è calcolato.

Il lavoro di una forza conservativa lungo un cammino finito non dipende dalla forma della traiettoria e dalla legge oraria con cui si muove il punto di applicazione, ma solo dai punti estremi della traiettoria.

Essendo per ipotesi U una funzione a un sol valore (funzione monodroma) segue che se si prendono P_1 e P_2 coincidenti (curva chiusa) si ha $U(P_2) = U(P_1)$, quindi $L = 0$

È possibile dimostrare che se il lavoro non dipende dalla curva, ma solo dai suoi estremi (il che equivale a dire che il lavoro lungo un qualunque cammino chiuso è nullo) allora la forza è conservativa.

3.4. Superfici equipotenziali e linee di forza

Chiamiamo *superficie equipotenziale* il luogo geometrico dei punti dello spazio per i quali il potenziale di una forza conservativa assume un valore costante. Detta $U(x, y, z)$ la funzione potenziale si ha l'equazione cartesiana:

$$U(x; y; z) = C \tag{A3.7}$$

Differenziando la (A3.7) si ottiene $dU = 0$ ovvero spostando il punto di applicazione di una forza conservativa lungo una curva appartenente ad una superficie equipotenziale, il potenziale non cambia. Questo comporta, mediante la (A3.3) che $dL = 0$, ovvero il lavoro della forza è nullo e per definizione di lavoro si ha:

$$\mathbf{F} \times dP = 0$$

Poiché gli spostamenti dP sono tangenti alla superficie equipotenziale, l'annullarsi del prodotto scalare del lavoro equivale a dire che la forza è normale punto per punto alla superficie equipotenziale o, al massimo, è nulla.

Si dicono allora *linee di forza* quelle curve che in ogni punto sono tangenziali ai vettori di forza.

Di conseguenza le linee di forza risultano essere punto per punto normali alle superfici equipotenziali che attraversano.

Esempi

La forza peso agente su un corpo è una forza conservativa definita mediante un vettore applicato nel baricentro G e proporzionale alla massa del corpo: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$.

Il suo lavoro è dato da:

$$dL = \mathbf{F} \times dG = m\mathbf{g} \times dOG = d(m\mathbf{g} \times OG + C)$$

e risulta essere un differenziale esatto, espresso proprio come il differenziale di una funzione regolare a un sol valore:

$$U = m\mathbf{g} \times OG + C$$

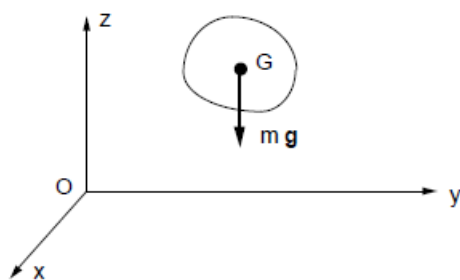


Figura A3.2 – Generico corpo soggetto alla forza peso